

Simulation des Risswachstums in einer Compact Tension - Probe nach ASTM E399 mit einem spröden Phasenfeldmodell

Zhengkun Liu ¹⁾, Julian Roggel ¹⁾, Daniel Juhre ¹⁾

¹⁾Institut für Mechanik, Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg, Deutschland, Zhengkun.liu@ovgu.de, +49 391 67 52515

Zusammenfassung

Ein wesentliches Ziel bei der Auslegung von Bauteilen ist der Nachweis der Betriebsfestigkeit. Neben konventionellen Lebensdauerversuchen spielt hierbei auch die Untersuchung der Rissausbreitung im Material eine große Rolle. Mithilfe der Bruchmechanik, die sich mit der Trennung des Körpers durch einen oder mehrere Risse beschäftigt, können Vorhersagen zur Rissentstehung, und dessen Ausbreitung getroffen werden [1,2]. Im Rahmen der Bruchmechanik werden zusätzliche Materialkennwerte wie die Bruchzähigkeit oder die kritische Energiefreisetzungsrates eingeführt. Diese Kennwerte können aus Versuchen an genormten Probegeometrien ermittelt werden. Einer dieser Probekörper ist die Compact-Tension-Probe (CT-Probe) nach ASTM E399 [2]. Die numerische Implementierung der bruchmechanischen Ansätze in den Entwicklungsprozess bietet sich an, da sich auch komplexe Bauteile kostengünstig auf Rissinitiierung überprüfen lassen und Risspfade vorhergesagt werden können. Es gibt verschiedene Alternativen, Rissausbreitung und -initiierung in Bauteilsimulationen umzusetzen. Eine Möglichkeit ist die Phasenfeldmethode, bei der neben dem Verschiebungsfeld eine zusätzliche skalare Variable berücksichtigt wird, die den Rissverlauf definiert. Durch die Implementierung des Phasenfeldmodells in die Finite-Elemente-Methode können somit komplexe Geometrien simuliert und eine Vorhersage zum Bauteilverhalten getroffen werden [3,4]. In diesem Beitrag werden die Ergebnisse zur FE-Simulation einer CT-Probe mit einem spröden Phasenfeldmodell präsentiert, wobei der Riss durch die Variable des Phasenfelds dargestellt wird. Neben dem Einfluss der Phasenfeldparameter wird auch die Auswirkung der FE-Diskretisierung betrachtet.

Schlüsselwörter: Phasenfeldmodellierung, Finite-Elemente-Analyse, Schädigung, ASTM E399, Bruchmechanik

1. Einleitung

Die Konstruktion von neuartigen Produkten ist das Ziel der Ingenieurwissenschaften. Zur sicheren Nutzung dieser Bauteile muss nachweisbar sein, dass diese nicht versagen. Ein wesentlicher Bestandteil hiervon ist die Bruchmechanik, die sich mit dem Bruch, also der Trennung des Körpers, beschäftigt. Diese Trennung entsteht durch das Wachsen eines oder mehrerer Risse durch das Material. Hierbei ist von Interesse, wo Risse entstehen, wie sich diese ausbreiten und ab welcher Belastung sich Risse im Material fortpflanzen. Die Bruchmechanik ist unabhängig von der reinen Kontinuumsmechanik zu betrachten, da durch die Risse oder Kerben Spannungsspitzen entstehen, die das Bauteil zerstören bevor die klassisch berechnete Zugfestigkeit überschritten wird. Werden Kerben oder Risse in Materialien nicht betrachtet, kann es zu einer falschen Auslegung und ein Versagen im Betrieb kommen. Dieses kann katastrophale Folgen haben, beispielsweise im Straßenverkehr, der Luftfahrt oder der Raumfahrt. Zur Beschreibung der Bruchmechanik werden zusätzliche Materialkennwerte wie die Bruchzähigkeit oder die kritische Energiefreisetzungsrates eingeführt. Diese Kennwerte werden aus genormten Probegeometrien und Versuchen ermittelt. Einer dieser Probekörper ist die Compact-Tension-Probe (CT-Probe), die in dieser Arbeit simuliert werden soll. Eine solche Geometrie ist sinnvoll für eine numerische Studie, da diese als Standard anerkannt wird.

Die numerische Implementierung der Bruchmechanik in den Entwicklungsprozess bietet sich an, da sich auch komplexe Bauteile kostengünstig auf Rissinitiierung überprüfen lassen und Risspfade vorhergesagt werden können. Es können bei gleichen Kosten eines Probekörpers für einen Versuch unzählige Simulationen durchgeführt werden und somit Entwicklungskosten gespart werden. Die Fertigung komplexer Bauteile oder Baugruppen zur Überprüfung ist auch deshalb aufwendig, da noch keine Serienstandards in der Fertigung vorhanden sind und die Proben Einzelanfertigungen sind. Somit ist die Anzahl der realen Versuche so klein wie möglich zu halten. Es haben sich beispielsweise Crashsimulationen in der Automobilindustrie durchgesetzt, da hierdurch weniger neue Modelle hergestellt und zerstört werden müssen. Es gibt verschiedene Möglichkeiten Rissausbreitung und -initiierung mit einem Computer zu simulieren. Eine Möglichkeit der Berücksichtigung der Bruchmechanik ist die Phasenfeldmethode, die zusätzlich zur Finiten-Elemente-Methode ein skalares Feld nutzt,

welches den Riss modelliert. Hiermit sind komplexe Geometrien simulierbar und ermöglichen somit eine Vorhersage des Verhaltens des Bauteils.

2. Phasenfeldmethode in der Bruchmechanik

Neben der analytischen Lösung ist eine numerische Methode interessant, um eine Rissbildung und Rissausbreitung vorherzusagen. Eine Möglichkeit ist die Phasenfeldmethode, bei der Risse durch eine zusätzliche kontinuierliche Feldvariable dargestellt werden. Dies ermöglicht eine relativ einfache algorithmische Implementierung, da die Rissflächen nicht explizit modelliert werden müssen. Eine direkte Modellierung der Rissflächen Verschiebungsfeld, das zu numerischen Schwierigkeiten führen kann.

Die Grundlage der Rissmodellierung mit dem Phasenfeld ist das klassische Griffith-Kriterium, das beschreibt, dass ein Riss wächst, wenn es energetisch günstig ist [2]. Dieses Modell ist durch eine Variationsformulierung von Francfort und Marigo [3] erweitert worden, wobei die Gesamtenergie, bestehend aus elastischer Energie und Rissenergie, minimiert wird. Dies ermöglicht eine Modellierung von Rissentstehung und komplexe Rissmuster. Neben der Verschiebung als Grundlage der Modellierung wird bei der Phasenfeldmethode ein zusätzlicher skalarer Ordnungsparameter s eingeführt. Diese Feldvariable bestimmt hierbei zwischen gebrochenem und ungebrochenem Material und modelliert den Steifigkeitsverlust des geschädigten Materials. Ist $s = 1$ ist das Material unbeschädigt, ist $s = 0$ handelt es sich um vollständig gebrochenes Material, also um einen Riss. Das Phasenfeld ist stetig im Bereich $0 \leq s \leq 1$, es handelt sich um ein diffuses Interface.

Das Energiefunktional lässt sich für geschädigte Bauteile wie folgt formulieren:

$$\Gamma = \int_{\Omega} \left[\frac{(1-s)^2}{4\xi} + \xi |\nabla s|^2 \right] dV \quad (1)$$

Dieses Energiefunktional wird nun mit der kritischen Energiefreisetzungsrate G_c multipliziert, wodurch die Bruchenergie approximiert werden kann.

$$\int_{\Omega} G_c \left[\frac{(1-s)^2}{4\xi} + \xi |\nabla s|^2 \right] dV = \int_{\Omega} \Psi_s dV \quad (2)$$

Hierbei wird Ψ_s als Bruchenergiedichte bezeichnet. ξ stellt einen Parameter dar, der die Übergangsbreite zwischen unbeschädigtem und gebrochenem Material definiert. Mit der Approximation der Bruchenergie und der Beschreibung der elastischen Energie lässt sich ein Minimierungsproblem aufstellen. Das Gesamtpotential Π besteht aus elastischer Energie Ψ_e , Bruchenergie und dem Potential der äußeren Kräfte und lässt sich wie folgt formulieren.

$$\Pi(\mathbf{u}, s) = \int_{\Omega} \Psi_e(\epsilon(\nabla \mathbf{u})) dV + \int_{\Omega} G_c \left[\frac{(1-s)^2}{4\xi} + \xi |\nabla s|^2 \right] dV - \int_{\Omega} \mathbf{t}^* \mathbf{u} dA \quad (3)$$

Allgemein lässt sich die elastische Energie Ψ_e wie folgt für das Phasenfeld darstellen:

$$\Psi_e = \frac{1}{2} (s^2 + \eta) \epsilon : (\mathbb{C} : \epsilon) \quad (4)$$

Es ergibt sich eine Evolutionsgleichung für das Rissfeld mit Gl. (3)

$$\frac{1}{M} \dot{s} + 2s\Psi_e - G_c \left[2\xi \Delta s + \frac{1-s}{2\xi} \right] = 0 \quad (5)$$

3. Geometrie der CT-Probe

Als Benchmarktest soll eine CT-Probe modelliert werden. Die Geometrie der CT-Probe ist in der ASTM E399 (Standard Test Method for Linear-Elastic Plane-Strain Fracture Toughness K_{Ic} of Metallic Materials) (Literaturhinweis) festgelegt (Bild 1). In dieser Arbeit wird für das Modell eine Länge von $B = a = 12$ mm angenommen. Diese Größe der Probe ist fertigungstechnisch schlecht zu realisieren, wird für die Modellierung jedoch genutzt, da die endgültige Größe dem jeweiligen Material angepasst werden muss. Die restliche Geometrie wird entsprechend ausgeführt, sodass die Norm erfüllt wird. Für die Form der Kerbe gibt es in der Norm verschiedene Ausführungen, in dieser Arbeit wird die Form b) aus Bild 2 verwendet. Die gewählten Abmessungen sind in der Tabelle 1 aufgeführt.

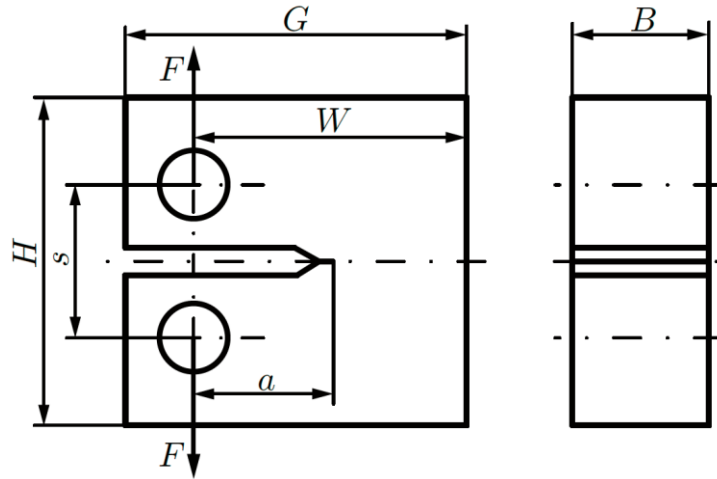


Bild 1: Geometrie der CT-Probe nach ASTM E399

Tabelle 1: Geometrie der CT-Probe

| Abmessung in mm | Wert | Einheit |
|-----------------|------|----------|
| W | 24 | mm |
| B | 12 | mm |
| s | 13,2 | mm |
| H | 28,8 | mm |
| a | 12 | mm |
| x | 1,5 | mm |
| D | 6 | mm |
| G | 30 | mm |
| θ | 60 | Grad (°) |
| z | 2 | mm |

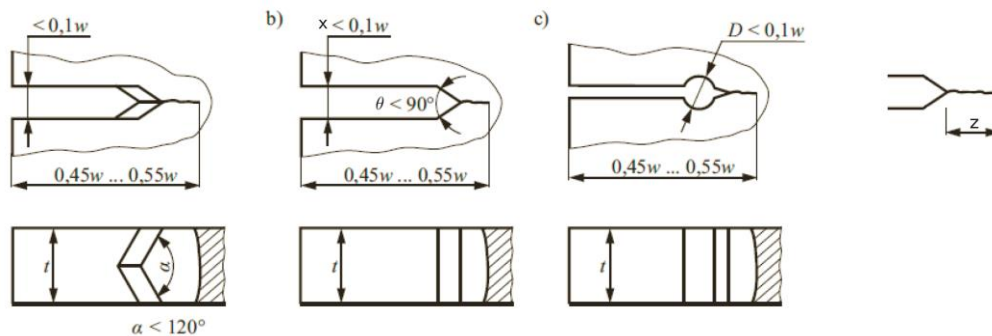


Bild 2: Korbformen der CT-Probe gemäß ASTM E399

4. Berechnungen

Zur Berechnung wird das Modell der CT-Probe in ein Input-File für FEAP überführt. Es bedarf einer Definition der Material- und Phasenfeldkennwerte, der Iterationsschritte, der Geschwindigkeit der Lastaufbringung und der gewünschten Verschiebung. Die Berechnungszeit wurde als normierte Größe auf eine Sekunde festgelegt. Die genutzten Kennwerte sind in den Tabelle 2 und Tabelle 3 dargestellt. Die Materialkennwerte richten sich nach dem Gusseisen GG25. Für die Verschiebung wird 0,5 mm festgelegt. Die Definition des Anfangsrisses führt zu einer instabilen Situation. Berechnet wird deshalb zunächst einmal statisch ohne Last, um einen stabilen Zustand für das Phasenfeld zu erhalten.

Tabelle 2: Materialkennwerte in der Simulation

| Kennwert | Formelzeichen | Wert | Einheit |
|----------------------|---------------|--------|---------|
| E-Modul | E | 118000 | MPa |
| Querkontraktionszahl | ν | 0,26 | |

Tabelle 3: Phasenfeldkennwerte der Simulation

| Kennwert | Formelzeichen | Wert | Einheit |
|-------------------------|---------------|--------|------------------------|
| Steifigkeit bei $s = 0$ | η | 0,0001 | |
| Übergangsbreite | ξ | 0,5 | mm |
| Risswiderstand | G_c | 2 | N/mm |
| Mobilitätskonstante | M | 1000 | mm ² /N · s |

Hierbei entsteht der diffuse Bereich zwischen dem Anfangsriss und dem ungeschädigten Material. Von diesem stationären, spannungsfreien Zustand ($\dot{s} = 0$) wird die iterative Rechnung mit Lastaufbringung begonnen.

4.1 Berechnungsergebnisse

Im Folgenden werden die Ergebnisse der Simulation grafisch dargestellt. Bild 3 zeigen hierbei das Phasenfeld als Abstufungen des Wertes des Schädigungsparameters s .

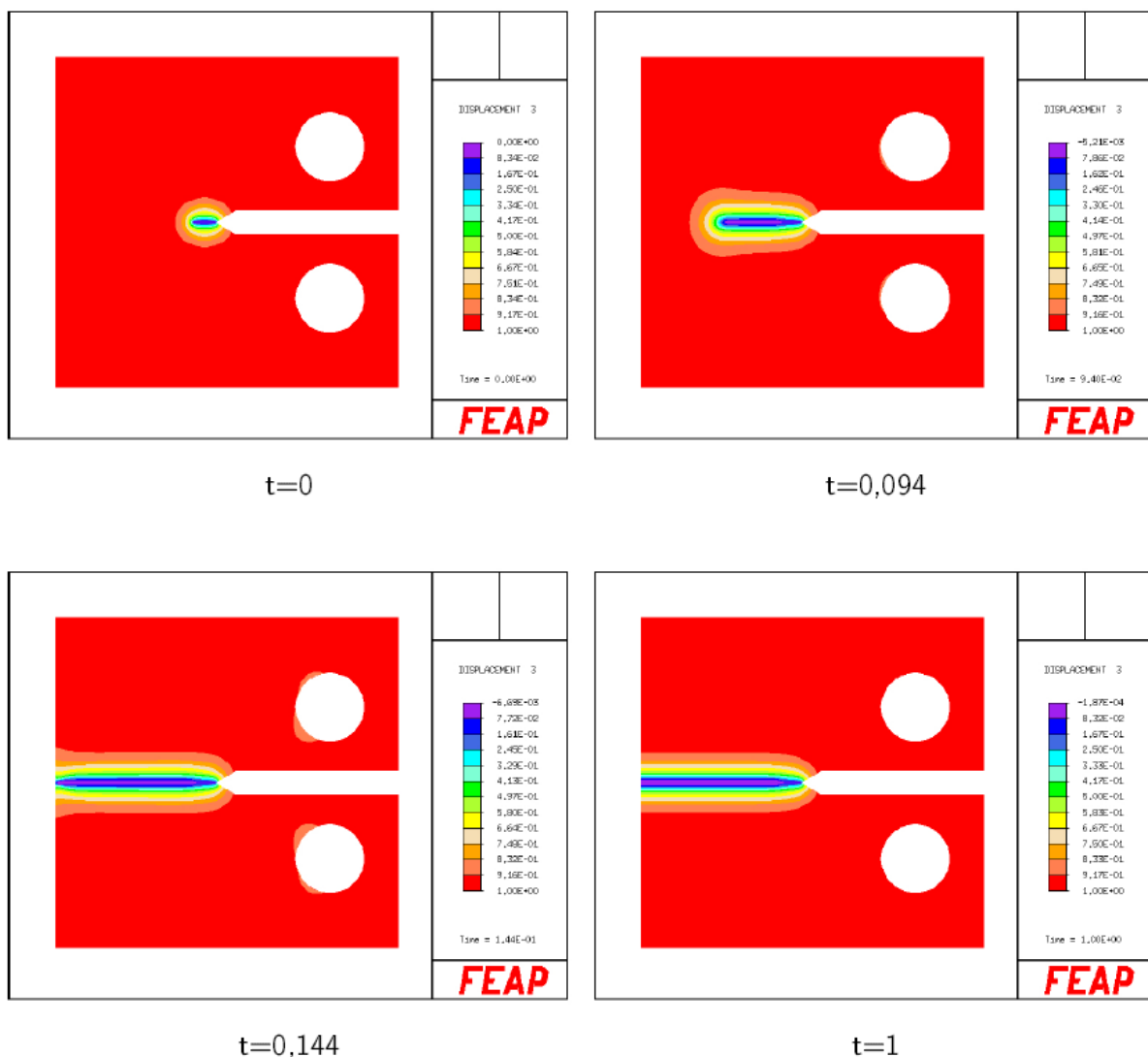


Bild 3: Simulation des Risswachstums der CT-Probe zu verschiedenen Zeitpunkten

Oben links ($t=0$) in Bild 3 ist das Ergebnis nach der statischen Iteration dargestellt. Es folgt rechts oben ($t = 0,094s$) ein Zustand während des Risswachstums und unten links der Zeitpunkt ($t = 0,144s$), wenn der Riss gerade das Ende der Probe erreicht hat. Unten rechts ($t = 1s$) ist die Lösung nach der gesamten aufgetragenen Verschiebung dargestellt. Die Ergebnisse entsprechen dem erwarteten Verlauf. Es ist zu beachten, dass es auch bei den Bohrungen zu einem leichten Phasenfeldes kommt. Dies liegt sowohl an dem relativ großen Übergangsparameter ξ und der Bohrung selbst, die eine Kerbe darstellt und somit die Spannung hier größer ist als in der Umgebung. Das Phasenfeld erreicht jedoch nur eine leichte Minderung ($s = 0,9$) und geht im Laufe der Rechnung wieder zurück auf den Ausgangswert ($s = 1$). Es ist somit ein rein numerisches Phänomen.

Neben der Darstellung des Schädigungsparameters s lässt sich ein Kraft-Weg-Diagramm bestimmen. Hierzu wird die Verschiebung und Kraft auf einen Knoten ausgewertet. Als Knoten wird der in der oberen Bohrung mit dem größten y -Wert gewählt. Es ergibt sich der folgende Verlauf in Bild 4:

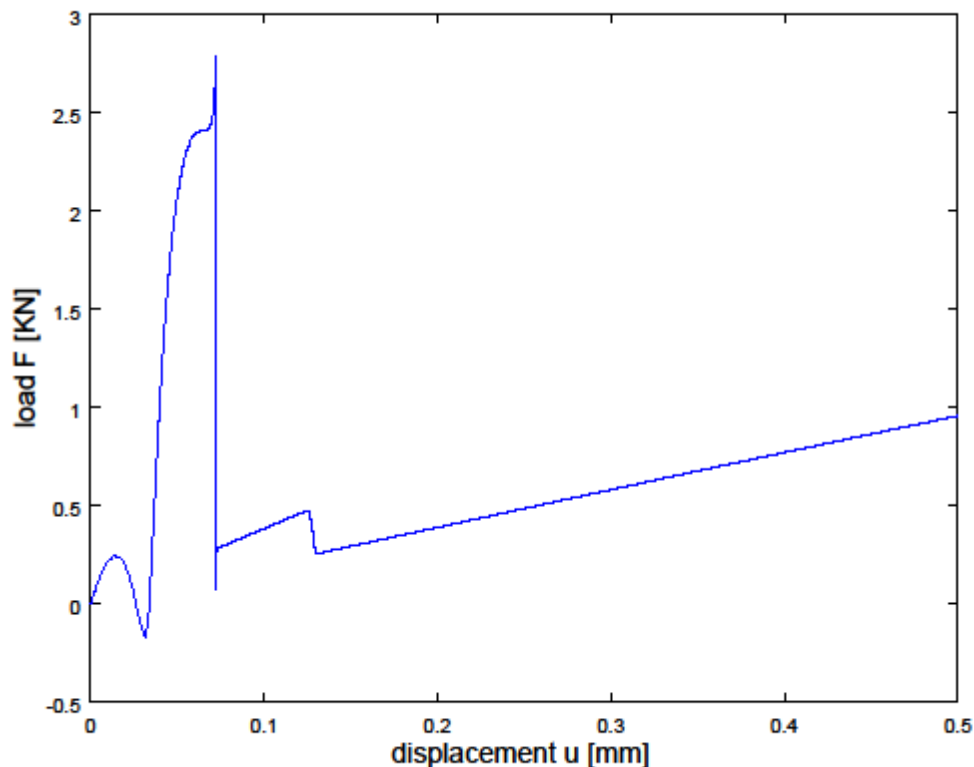


Bild 4: Kraft-Verschiebung-Diagramm

Der Verlauf entspricht nicht einem der Verläufe, die als typische Ergebnisse dieses Tests gelten. Dies hat verschiedene Gründe. Im realen Experiment wird die Verschiebung über eine zusätzliche Klemme und die Kraft durch die Maschine gemessen, was in dem Modell nicht modelliert wurde. Die ersten Kraftsteigerungen stimmen überein mit einer leichten Schwächung des Materials an der Bohrung, wo die Kraft gemessen wird. Da die ausgegebene Reaktionskraft aus der Spannung für den Messpunkt bestimmt wird und die Spannung vom Phasenfeld abhängig ist, sind diese Schwankungen nachvollziehbar. Im Vergleich zum Hauptpeak jedoch sind vor allem bei kleineren Werten von ξ die ersten Peaks nur wenige Prozent und somit vernachlässigbar. Während des großen Peaks schreitet der Riss in der Bauteilmitte fort, und der Abfall der Kraft stimmt mit dem Erreichen des Risses am Ende des Bauteils überein. Dass die Kraft danach wieder steigt, liegt an der Reststeifigkeit η , die dazu führt, dass die Kraft trotz des Risses noch übertragen werden kann.

4.2 Einfluss des Parameters ξ

Der Parameter ξ beschreibt den Übergang vom unbeschädigten zum gebrochenen Material. Je kleiner ξ , desto kleiner der Übergangsbereich. Bei den Berechnungen mit verschiedenen Werten von ξ wird darauf geachtet, dass $\xi \geq h_{mesh}$ gilt, wobei h_{mesh} die Elementkantenlänge des FE-Modells im Bereich des Risses ist. In diesen Berechnungen beträgt $h_{mesh} = 0,05$. ξ kann sowohl als reiner numerischer Parameter des Phasenfeldmodells oder

als Materialparameter betrachtet werden. Für den Fall, dass ξ als ein Materialparameter betrachtet wird, muss der Wert aus experimentellen Daten ermittelt werden. Im Falle des reinen numerischen Parameters gilt, dass die numerische Lösung besser mit der analytischen Lösung des spröden Phasenfeldmodells übereinstimmt, je kleiner wird.

Der Einfluss des Parameters auf das Phasenfeld ist in der nachfolgenden Grafik 5 dargestellt.

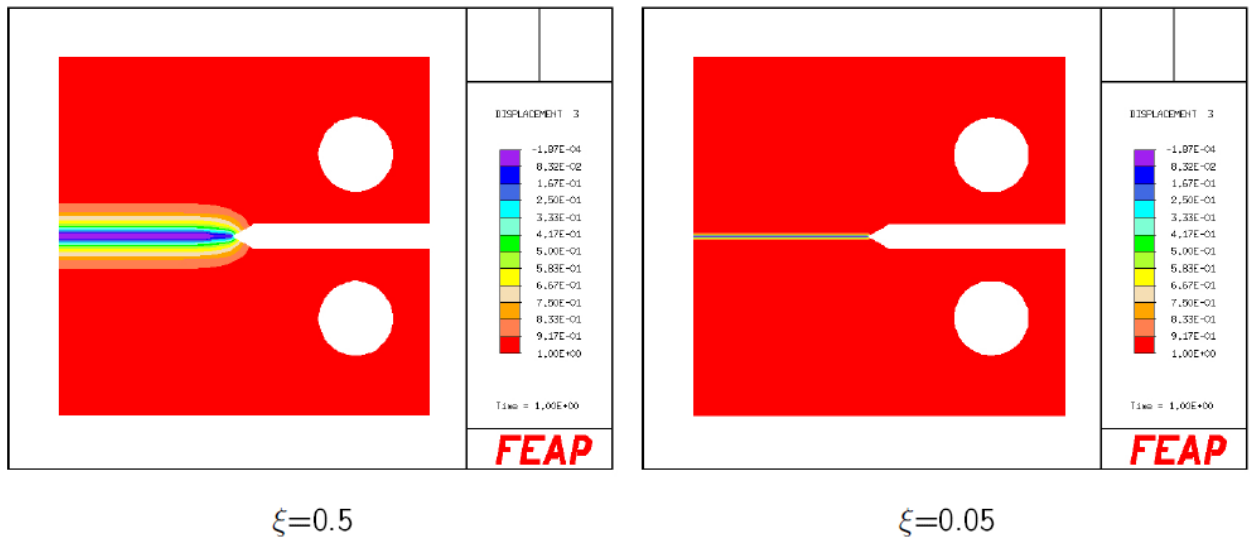


Bild 5: Einfluss des Parameters ξ auf das Phasenfeld

Es ist gut zu erkennen, dass durch einen größeren Wert von ξ der geschädigte Bereich zunimmt.

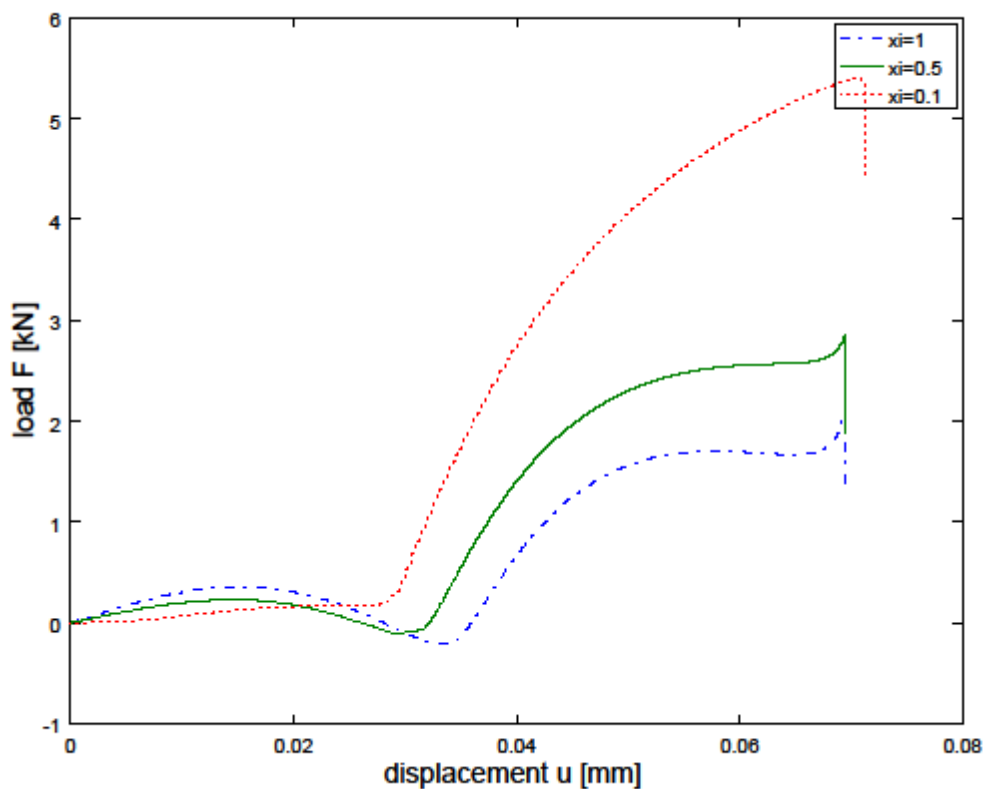


Bild 6: Einfluss des Parameters ξ

In Bild 6 sind die Kraft-Weg-Kurven der CT-Probe bei drei verschiedenen Werten von ξ dargestellt. Es ist zu erkennen, dass mit sinkenden Werten von ξ die maximale Kraft stark und die Verschiebung beim Bruch leicht

ansteigt. Dies entspricht auch der Erwartung. Durch einen größeren geschädigten Bereich (größerer Wert für ξ) wird eine geringere Kraft benötigt, um das Bauteil zu zerbrechen. Es ist bei weiteren Berechnungen wichtig, dass der Parameter ξ nicht verändert wird, wenn ein direkter Vergleich gewünscht ist.

4.3 Einfluss der Mobilitätskonstante M

Die Mobilitätskonstante M berücksichtigt das dynamische Verhalten bei schlagartigem Risswachstum. Bei der Simulation der CT-Probe werden verschiedene Werte für M verwendet und die Ergebnisse miteinander verglichen. Grundsätzlich gilt, dass mit steigendem Wert für M die Genauigkeit der Berechnung zunimmt, jedoch auch die Rechenzeit. Es soll mit dem Vergleich bestimmt werden, ab wann die Konstante groß genug ist, dass sich nur noch geringe Änderungen im Ergebnis ergeben.

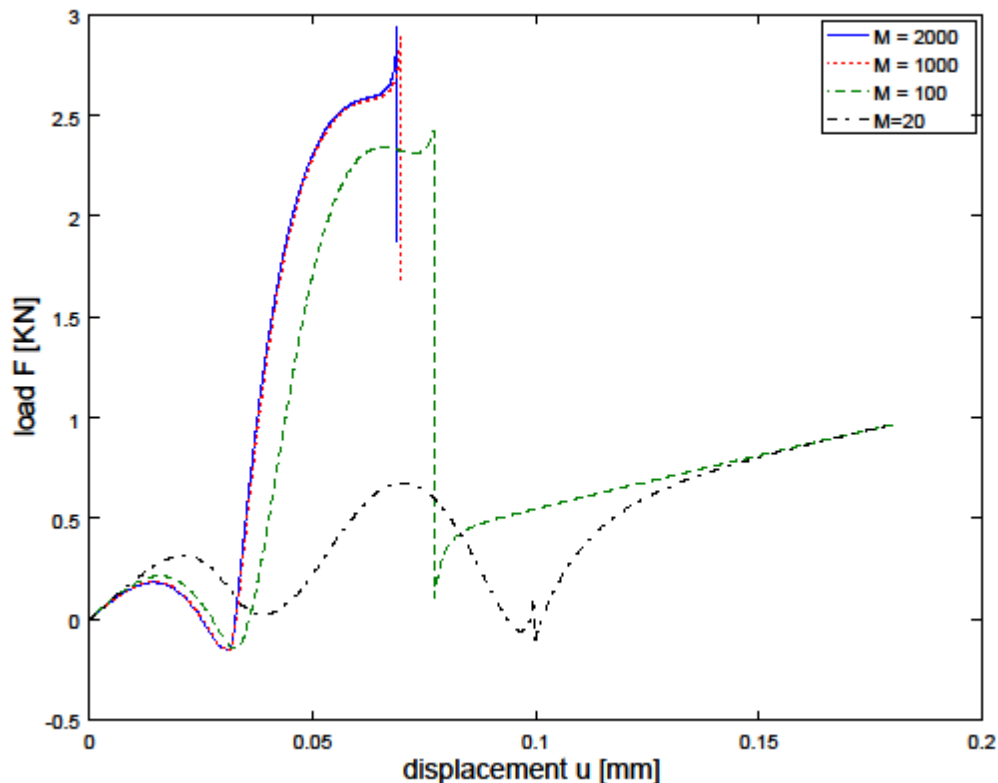


Bild 7: Einfluss der Mobilitätskonstante

Es ist in Bild 7 zu erkennen, dass zwischen einem Wert von $M = 1000$ und $M = 2000$ kein merklicher Unterschied in der Verschiebungs-Kraft-Kurve erkennbar ist. Das Ergebnis für $M = 20$ ist deutlich verfälscht, es muss unbedingt ein größerer Wert gewählt werden. Bei $M = 100$ ergibt sich ein sinnvoller Verlauf der Kraft, jedoch ist der Abstand zu dem Ergebnis von $M = 1000$ noch sehr groß. Zwischen $M = 1000$ und $M = 2000$ ist der Unterschied vernachlässigbar. Da ein großer Wert von M zu einer längeren Rechenzeit führt, ist somit ein Wert von $M = 1000$ als bester Wert zu sehen.

4.4 Einfluss der Konvergenzstudie

Um die Konvergenz der Lösung zu überprüfen wird eine Konvergenzstudie durchgeführt. Hierbei wird das Kraft-Weg-Diagramm für die im Bereich des Risses verschieden feine Netze verglichen. Die Ergebnisse der Berechnung sind als Kraft-Verschiebungs-Diagramm in Bild 8 dargestellt.

Es ist zu erkennen, dass die horizontale Verfeinerung einen vernachlässigbaren Einfluss auf den Kraftverlauf hat. Der Bereich nach dem größten Peak entsteht durch die Reststeifigkeit und ist irrelevant, da er nur numerischen Ursprungs ist und nicht weiter betrachtet werden muss. Während des Rissfortschritts stimmen die Werte bei den verschiedenen Netzvarianten sehr gut überein. Die Ergebnisse der Konvergenzstudie sind als Kraft-Verschiebungs-Diagramm in Bild 9 dargestellt. Es ist zu erkennen, dass durch die variierten Elementkantenlängen

Unterschiede entstehen, jedoch bei den beiden feineren Netzen nur noch vernachlässigbare Unterschiede vorhanden sind, die Lösung somit konvergiert. Es ist jedoch zu beachten, dass diese Konvergenz nur für $\xi = 0,5$ gilt, verringert man den Wert beispielsweise auf $\xi = 0,2$ führt dies neben der größeren Amplitude auch zu Unterschieden zwischen den Netzen mit Elementkantenlängen von 0,05 und 0,02, die sich bei $\xi = 0,5$ nur vernachlässigbar unterscheiden. Im Vergleich zu den Unterschieden der maximalen Kraft durch den Einfluss von ξ ist jedoch der Einfluss des Netzes vernachlässigbar.

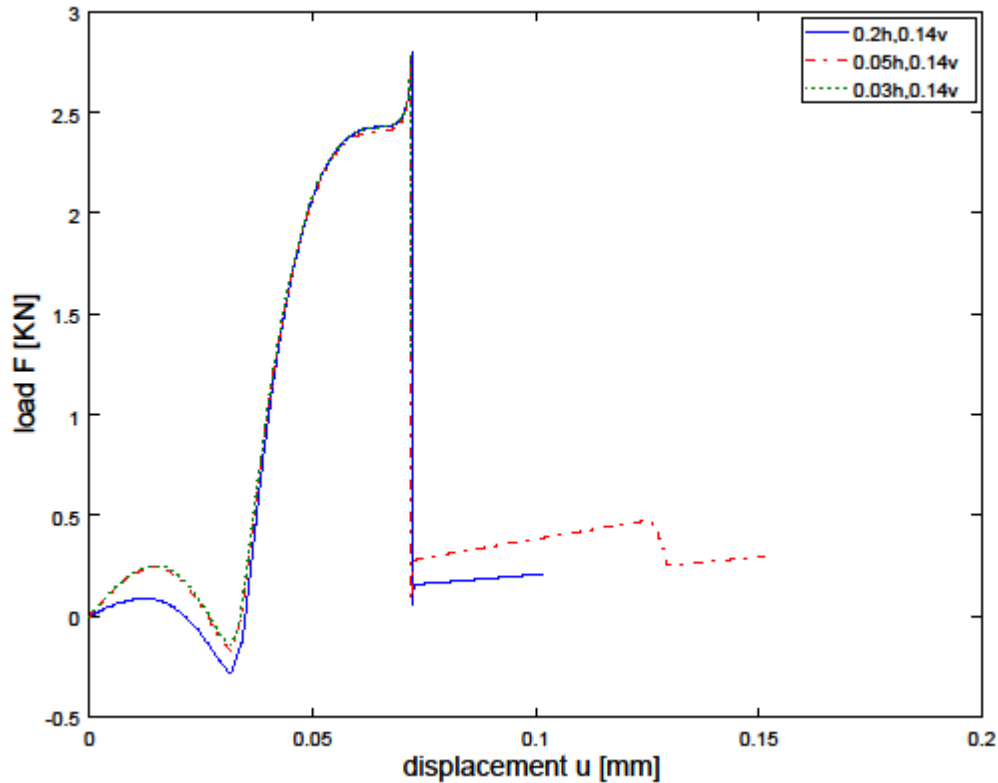


Bild 8: Konvergenzstudie-horizontale Verfeinerung

5. Bestimmung der kritischen Energiefreisetzungsrate aus den Simulationsergebnisse

In diesem Abschnitt werden die Simulationsergebnisse genutzt, um den als Parameter für das Phasenfeld angegebenen Wert für die kritische Energiefreisetzungsrate G_{Ic} zu überprüfen. Der Wert berechnet sich nach Formel (3) aus Materialkennwerten und der Bruchzähigkeit K_{Ic} , die wiederum von der Geometrie und der maximalen Kraft abhängt. Dementsprechend muss aus der Simulation lediglich die kritische Kraft bestimmt werden. Es ergibt sich die folgende Formel für die verwendete Geometrie (vgl. Tab. 1) und Materialparameter (vgl. Tab. 2):

$$K_{Ic} = \frac{F_{max}}{B\sqrt{W}} f\left(\frac{a}{w}\right) = F_{max} \cdot 0,1643 \quad (6)$$

Mit der kritischen Kraft von 2.7 kN ergibt sich für die kritische Energiefreisetzungsrate:

$$G_{Ic} = \frac{K_{Ic}^2(1-\nu^2)}{E} = 1,6724 \quad (7)$$

Für das Phasenfeld wurde der Wert von $G_{Ic} = 2$ angenommen, wodurch das Ergebnis relativ gut passt. Durch das Anpassen des Wertes von ξ ließe sich genau der angegebene Wert von G_{Ic} erzielen. Es ist bei dem Vergleich jedoch zu beachten, dass schon die Änderung des Messpunktes für die Kraft und Verschiebung einen großen Einfluss auf das Ergebnis hat. Für einen vom Messpunkt unabhängigen Vergleich müsste die Kraft und

Verschiebung von einem Masterknoten in der Mitte der Bohrung bestimmt werden, der starr mit allen Knoten des Lochs verbunden ist.

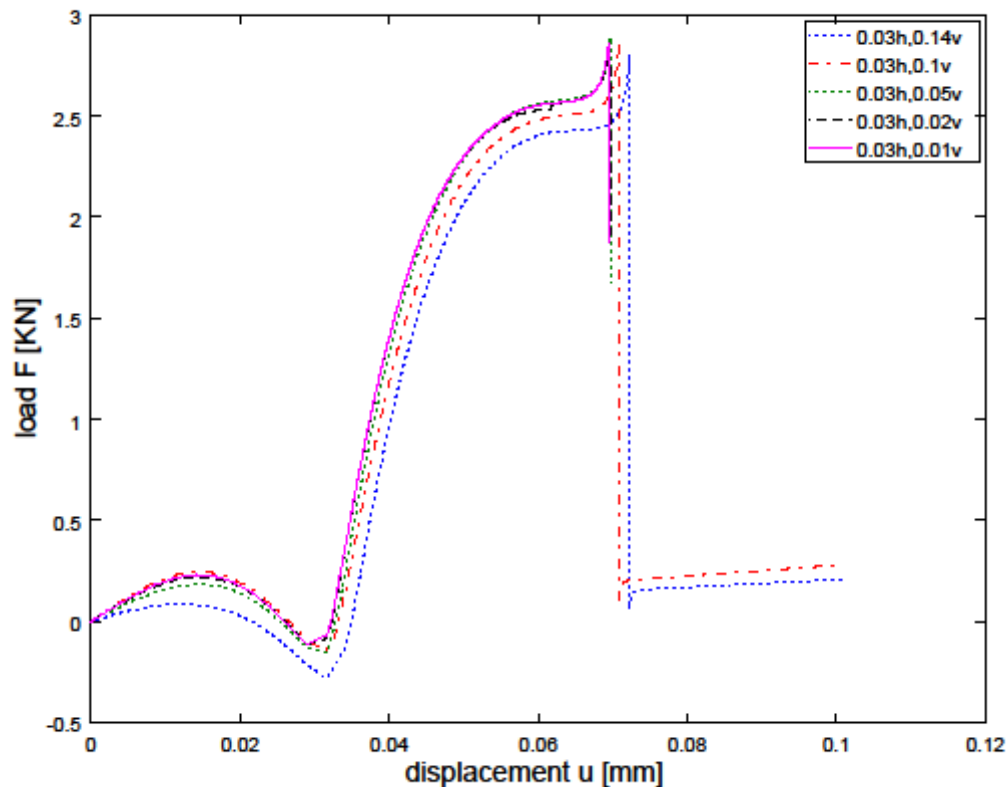


Bild 9: Konvergenzstudie-vertikale Verfeinerung

6. Fazit und Ausblick

Die Simulation des Risswachstums einer CT-Probe nach ASTM E399 mittels eines spröden Phasenfeldmodells ergibt sinnvolle Ergebnisse. Es eröffnet sich somit für die Phasenfeldmethode ein vielfältiges Einsatzspektrum in der Bestimmung von Rissinitiierung oder -pfaden. Die Phasenfeldmethode für den spröden Bruch ist jedoch nur von Ingenieuren anzuwenden, die den Hintergrund der einzelnen Parameter nachvollziehen können und diese den Anforderungen entsprechend wählen. Beim Vergleich mit Literaturwerten oder Ergebnissen aus Experimenten ist vor allem der Übergangparameter ξ passend zu wählen. So muss festgelegt werden, ob ξ als reiner numerischer Parameter oder als Materialparameter betrachtet wird. Die Mobilitätskonstante sollte groß genug gewählt werden, um sinnvolle Ergebnisse zu bekommen und die Reststeifigkeit η hat einen entscheidenden Einfluss darauf, wie viel Kraft trotz gebrochenen Materials noch übertragen werden kann und sollte möglichst gering gewählt werden, wobei jedoch die numerische Stabilität erhalten bleiben muss.

Die Ergebnisse zeigen auch, dass für die Bestimmung eines Kraft-Weg-Diagramms der Messpunkt eine größere Rolle spielt. Optimal wäre es, wenn der Messpunkt ein Masterknoten in der Mitte der Bohrungen wäre, der starr mit allen Knoten des Lochs verbunden ist. Dies lässt sich jedoch im genutzten Programm FEAP nicht schnell und einfach implementieren. Eine weitere Möglichkeit wäre die Modellierung eines starren Zylinders, der die Verschiebung über eine Kontaktdefinition auf die CT-Probe überträgt. Hierbei gibt es jedoch in FEAP Probleme mit der Starrkörperdefinition. Es ist abschließend zu sagen, dass die Phasenfeldmethode zur Simulation von Risswachstum ein großes Anwendungspotential besitzt und sinnvolle Ergebnisse liefert. Bei einer korrekten Anwendung lassen sich viele komplexe bruchmechanische Probleme untersuchen und die Notwendigkeit von experimentellen Versuchen reduzieren, was bezüglich der Entwicklungskosten und -zeit vorteilhaft ist.

Literaturverzeichnis

- [1] Rösler, J.; Harders, H.; Bäcker, M.: Mechanisches Verhalten der Werkstoffe, Springer Verlag, 2016

- [2] Gross, D.; Seelig, T.: Bruchmechanik mit einer Einführung in die Mikromechanik, Springer Verlag, 2016
- [3] Kuhn, C.; Müller, R.: A continuum phase field model for fracture, Engineering Fracture Mechanics, 2010, S.3625-3634
- [4] Schlüter, A.; Willenbücher, A.; Kuhn, C.: Phase field approximation of dynamic brittle fracture, Computational Mechanics, 2014, S. 1141-1161