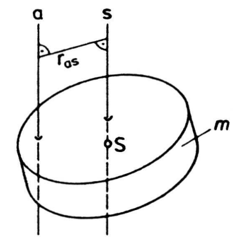
Massenträgheitsmomente

Die Massenmomente 2. Ordnung (Massenträgheitsmomente) eines starren Körpers kennzeichnen die Trägheitseigenschaften eines starren Körpers bei der Drehung. Es sind mathematische Größen, die von der Körpermasse, der Massenverteilung und der Wahl des Bezugssystems abhängen.

Man unterscheidet zwischen axialen Massenträgheitsmomenten und Deviationsmomenten (Zentrifugalmomenten). **Hinweis:** Man beachte die Analogien zu den Flächenträgheitsmomenten.

Die axialen Massenträgheitsmomente sind definiert durch ein Integral über alle mit dem Quadrat ihrer Abstände r_a von der Drehachse a multiplizierten infinitesimalen Masseteilchen dm eines Körpers:



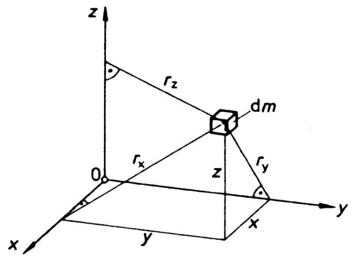
$$\Theta_a = \int_{(m)} r_a^{\,2} dm$$

Berechnung der axialen Massenträgheitsmomente in kartesischen Koordinaten

$$\Theta_x = \int_{(m)} r_x^{\,2} dm = \int_{(m)} \left(y^2 + z^2\right) dm$$

$$\Theta_y = \int_{(m)} r_y^{\,2} dm = \int_{(m)} \left(x^2 + z^2\right) dm$$

$$\Theta_z = \int_{(m)} r_z^{\,2} dm = \int_{(m)} \left(x^2 + y^2\right) dm$$

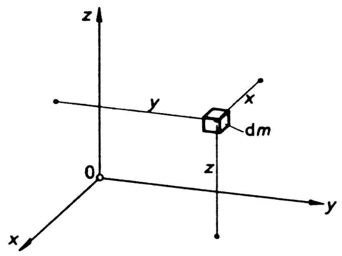


Berechnung der zentrifugalen Massenträgheitsmomente in kartesischen Koordinaten

$$\Theta_{xy} = -\int_{(m)} x\, y\, dm$$

$$\Theta_{yz} = -\int_{(m)} y\, z\, dm$$

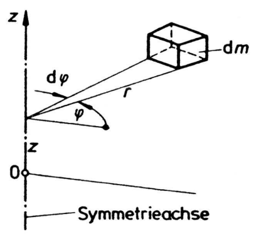
$$\Theta_{zx} = -\int_{(m)} z\, x\, dm$$



wobei sich dm darstellen lässt als $dm = \rho\, dV = \rho\, dx\, dy\, dz$. Es ergeben sich also im allgemeinen Dreifachintegrale.
Die Deviationsmomente sind ein Maß für die dynamischen Unwuchten eines Körpers, denn sie charakterisieren die unsymmetrische Verteilung der Massen bezüglich der Koordinatenebenen. Sie bewirken ein Kippen um eine zur Drehachse senkrechte Achse oder dynamische Lagermomente und eine S-förmige Biegung in einer umlaufenden Welle.

Bei **Rotationskörpern** bietet sich die Verwendung von **Zylinderkoordinaten** an. Dann ergibt sich das axiale Massenträgheitsmoment bezüglich der Rotationsachse z zu

$$\Theta_z = \int_{(m)} r^2 dm$$



Hauptträgheitsmomente und Hauptträgheitsachsen

Man kann alle Massenträgheitsmomente in einer Matrix anordnen.

$$\mathbf{\Theta} = \begin{bmatrix} \Theta_{xx} & \Theta_{xy} & \Theta_{xz} \\ \Theta_{xy} & \Theta_{yy} & \Theta_{yz} \\ \Theta_{xz} & \Theta_{yz} & \Theta_{zz} \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{Hauptachsentransformation}} \begin{bmatrix} \Theta_1^H & 0 & 0 \\ 0 & \Theta_2^H & 0 \\ 0 & 0 & \Theta_3^H \end{bmatrix}$$

Es existiert für jeden Körper ein orthogonales Achsensystem im Massenmittelpunkt für das diese Matrix Diagonalform annimmt. Diese Achsen sind die Hauptträgheitsachsen (HTA) und die entsprechenden Massenträgheitsmomente sind die Hauptträgheitsmomente (HTM).
Die Lage dieses orthogonalen Achsensystems berechnet sich aus dem Matrizeneigenwertproblem.

$$\left(\mathbf{\Theta} - \Theta^H \mathbf{I}\right)\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

Aus $\left|\left(\mathbf{\Theta} - \Theta^H \mathbf{I}\right)\right| = 0$ folgt die charakteristische Gleichung 3. Grades zur Bestimmung der drei HTM. Für jedes HTM lässt sich danach durch Lösen des homogenen Gleichungssystems $\left(\mathbf{\Theta} - \Theta^H \mathbf{I}\right)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ der zugehörige Eigenvektor $\mathbf{x}$ bestimmen. Der Eigenvektor enthält die Richtungscosinus für die entsprechende Achse.

Hinweis: Dieser Rechenweg wurde auch schon bei der Berechung der Hauptspannungen benutzt.

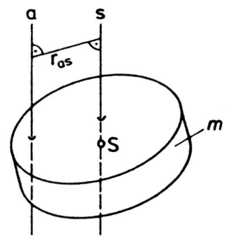
Hinweise zu Hauptträgheitsachsen:

Rotationskörper:	Symmetrieachsen sind Hauptträgheitsachsen
spiegelsymmetrische Körper:	eine HTA steht senkrecht auf der Symmetrieebene, die anderen beiden liegen in ihr
Körper mit zwei Symmetrieebenen:	die Schnittgerade ist HTA

Sind zwei HTM gleich groß, sind alle Achsen in der Ebene dieser beiden HTA ebenfalls HTA.
Sind drei HTM gleich groß, sind alle Achsen HTA.

Transformation der MTM auf zum Ausgangssystem parallele Achsen

Hier gilt wiederum der schon bekannte Satz von STEINER.
(vergleiche: Flächenträgheitsmomente)

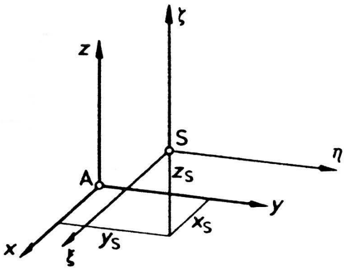


$$\Theta_a = \Theta_s + m r_{as}^2$$ wobei S der Massenmittelpunkt ist

In kartesischen Koordinaten ergibt sich dann

$$\Theta_x = \Theta_\xi + m\left(y_s^{\,2} + z_s^{\,2}\right)$$
$$\Theta_y = \Theta_\eta + m\left(x_s^{\,2} + z_s^{\,2}\right)$$
$$\Theta_z = \Theta_\zeta + m\left(x_s^{\,2} + y_s^{\,2}\right)$$

$$\Theta_{xy} = \Theta_{\xi\eta} - m\, x_s y_s$$
$$\Theta_{yz} = \Theta_{\eta\zeta} - m\, y_s z_s$$
$$\Theta_{zx} = \Theta_{\zeta\xi} - m\, z_s x_s$$



Der Satz von Steiner darf nur angewendet werden, wenn eine der beiden Achsen durch den Massenmittelpunkt verläuft. Anderenfalls geht man folgendermaßen vor:

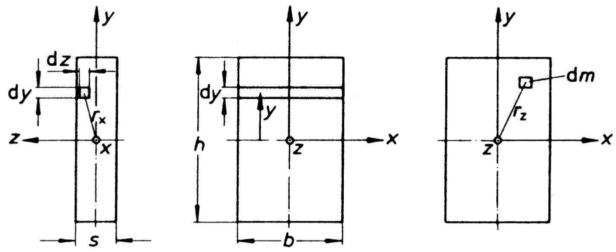
$$\Theta_s = \Theta_a - m r_{as}^2$$
$$\Theta_b = \Theta_s + m r_{bs}^2 = \Theta_a + m\left(r_{bs}^2 - r_{as}^2\right)$$

<u>Beispiele:</u>

(In der Vorlesung wurden der Quader, der Kreisringzylinder, der schlanke Stab, die dünne Kreisscheibe und die Hohlkugel behandelt.)

<u>dünne Rechteckplatte</u>

Man berechne die Massenträgheitsmomente einer homogenen dünnen Rechteckplatte konstanter Dicke s für die Achsen x, y und z.



Die Achsen x, y, z sind Symmetrieachsen des Körpers und damit auch HTA. Es sind folglich nur die axialen Massenträgheitsmomente zu bestimmen.
Das Massenelement dm kann ausgedrückt werden durch $dm = \rho\, dV = \rho\, b\, dy\, dz$.
Das Dreifachintegral über die Masse bzw. das Volumen reduziert sich hier auf ein Zweifachintegral.

Es folgt für

$$\Theta_x = \int_{(m)} r_x^{\,2} dm = \int_{y=-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_{z=-\frac{s}{2}}^{\frac{s}{2}} \left(y^2 + z^2\right) \rho\, b\, dz\, dy = \rho\, b \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left(y^2 z + \frac{1}{3} z^3 \right)\Bigg|_{-\frac{s}{2}}^{\frac{s}{2}} dy$$

$$= \rho\, b \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left(y^2 s + \frac{1}{12} s^3 \right) dy = \rho\, b \left(\frac{1}{3} y^3 s + \frac{1}{12} s^3 y \right)\Bigg|_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} = \frac{1}{12} \rho\, b \left(h^3 s + s^3 h\right)$$

$$= \frac{1}{12} (\rho\, b\, h\, s)\left(h^2 + s^2\right) = \underline{\underline{\frac{1}{12} m \left(h^2 + s^2\right)}}$$

Das ist das bekannte Ergebnis für den Quader. In gleicher Weise ergeben sich

$$\Theta_y = \frac{1}{12} m \left(b^2 + s^2\right)$$
$$\Theta_z = \frac{1}{12} m \left(h^2 + b^2\right)$$

Ist die Platte nun dünn, so ist $s << h, b$. Das heißt, in diesem Fall ist

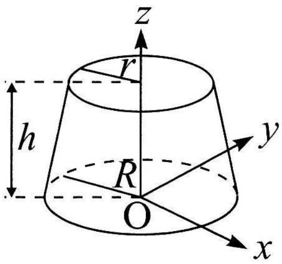
$$\Theta_x \approx \frac{1}{12} m\, h^2 \;,\; \Theta_y \approx \frac{1}{12} m\, b^2 \text{ und } \Theta_z = \frac{1}{12} m \left(h^2 + b^2\right).$$

Für einen dünnen Stab der Länge h (Stabachse y) mit beliebigem, jedoch konstantem Querschnitt ergibt sich dann wegen $s, b << h$

$$\Theta_x \approx \frac{1}{12} m\, h^2 \,,\; \Theta_y \approx 0 \text{ und } \Theta_z \approx \frac{1}{12} m\, h^2$$

Kegelstumpf

Für einen geraden homogenen Kreiskegelstumpf soll das Massenträgheitsmoment bezüglich der Rotationsachse bestimmt werden.



$$\Theta_z = \int_{(m)} r^2 dm \qquad \text{mit} \quad r^2 = x^2 + y^2$$

$$\Theta_z = \rho \iiint_{(V)} \left(x^2 + y^2\right) dx\, dy\, dz \qquad \text{oder}$$

$$\Theta_z = \rho \iiint_{(V)} r^2 \; r\, dr\, d\varphi\, dz = \rho \int_{z=0}^{h} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{r(z)} r^3 dr\, d\varphi\, dz$$

Dabei ist $r(z)$ eine lineare Funktion. $r(z) = az + b = \dfrac{r-R}{h} z + R$

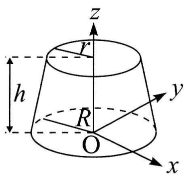
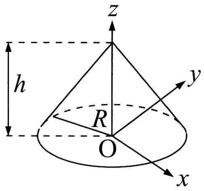
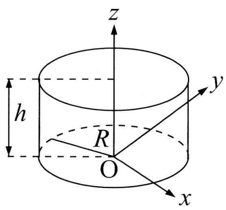
$$\Theta_z = 2\pi\rho \int_0^h \left.\frac{r^4}{4}\right|_0^{r(z)} dz = \frac{\pi\rho}{2} \int_0^h \left(a^4 z^4 + 4a^3 z^3 b + 6a^2 z^2 b^2 + 4azb^3 + b^4\right) dz$$

$$\Theta_z = \frac{\pi\rho}{2}\left(a^4 \frac{z^5}{5} + a^3 z^4 b + 2a^2 z^3 b^2 + 2az^2 b^3 + b^4 z\right)_0^h = \frac{\pi h \rho}{2}\left(a^4 \frac{h^4}{5} + a^3 h^3 b + 2a^2 h^2 b^2 + 2ahb^3 + b^4\right)$$

Ersetzt man nun a und b und fasst die Ausdrücke zusammen, so ergibt sich

$$\Theta_z = \frac{\pi h \rho}{10}\left(r^4 + r^3 R + r^2 R^2 + rR^3 + R^4\right)$$

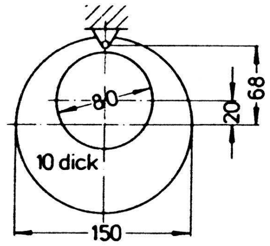
Als Sonderfälle enthält die Lösung die Ergebnisse für den Zylinder ($R=r$) sowie für den Kegel ($r=0$).
Zum Vergleich die Ergebnisse aus einem Tabellenbuch.

Gerader Kreiskegelstumpf		$J_z = \dfrac{3m}{10} \dfrac{R^4 + R^3 r + R^2 r^2 + Rr^3 + r^4}{R^2 + Rr + r^2}$ $m = \dfrac{1}{3}\pi\rho h(R^2 + Rr + r^2)$
Gerader Kreiskegel		$J_x = J_y = \dfrac{m}{20}(3R^2 + 2h^2)$ $J_z = \dfrac{3}{10} mR^2$ $m = \dfrac{\pi}{3}\rho R^2 h$
Gerader Kreiszylinder		$J_x = J_y = \dfrac{m}{12}(3R^2 + 4h^2)$ $J_z = \dfrac{1}{2} mR^2$ $m = \pi\rho R^2 h$

Kreisplatte mit Loch

Gesucht ist das Massenträgheitsmoment für die gelochte Platte bezüglich der Achse senkrecht zur Platte durch den Aufhängepunkt.

Der Aufhängepunkt sei P.



Folgende Abkürzungen werden eingeführt: d_1 = 150mm, d_2= 80mm, t= 10mm, e_1= 68 mm, e_2= (68-20) mm = 48 mm

Für die dünne Scheibe/Platte gilt allgemein bezogen auf den Massenmittepunkt:

$$\Theta_S = \frac{1}{2} mR^2 = \frac{1}{8} mD^2$$

$$m = \rho V = \rho\, At = \rho \frac{\pi}{4} D^2 t$$

$$\Theta_S = \rho \frac{\pi}{32} D^4 t$$

Mit diesen Formeln und unter der Berücksichtigung des Satzes von STEINER folgt

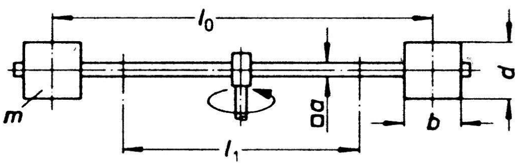
$$\begin{aligned}\Theta_P &= \Theta_1 - \Theta_2 + me_1{}^2 - me_2{}^2 \\ &= \frac{\pi}{32} d_1{}^4 t\rho - \frac{\pi}{32} d_2{}^4 t\rho + \frac{\pi}{4} d_1{}^2 t\rho\, e_1{}^2 - \frac{\pi}{4} d_2{}^2 t\rho\, e_2{}^2 \\ &= \frac{\pi}{4} t\rho \left(\frac{1}{8} d_1{}^4 - \frac{1}{8} d_2{}^4 + d_1{}^2 e_1{}^2 - d_2{}^2 e_2{}^2 \right)\end{aligned}$$

und mit den gegebenen Zahlenwerten

$$\begin{aligned}\Theta_P &= \frac{\pi}{4} 10\rho \left[\frac{1}{8} \left(150^4 - 80^4\right) + 150^2 \cdot 68^2 - 80^2 \cdot 48^2 \right] \\ &= 7{,}85398\rho (58161250 + 104040000 - 14745600) \\ &= 1158113726\rho \quad mm^5\end{aligned}$$

wobei die Dichte in $\left[\frac{Masse}{mm^3} \right]$ einzusetzen ist.

Stab mit verschiebbaren Massen



Auf einer Stahlstange mit quadratischem Querschnitt (Kantenlänge a) sitzen verschiebbar zwei zylindrische Massen aus Stahl (Durchmesser D, Länge b). Ihr größter gegenseitiger Abstand beträgt l_0 und das Trägheitsmoment der gesamten Anordnung ist Θ_0. In welchem Abstand l_1 müssen beide Massen arretiert werden, um das Trägheitsmoment um 50% zu reduzieren?

Geg.: a=10 mm, d=40 mm, b=40 mm, l_0=250 mm, Θ_0=132 kg cm^2 , ρ=7,85 g cm^{-3}

Es soll gelten: $\Theta_1 = \frac{1}{2}\Theta_0$

Das Trägheitsmoment setzt sich aus denen von Stange und zwei zylindrischen Teilen mit Loch zusammen. STEINERsche Anteile sind zu berücksichtigen. Die Formeln werden Tabellen entnommen.

Stange: $$\Theta_{\text{Stange}} = \frac{1}{12} m_{\text{Stange}} l^2 = \frac{1}{12}\rho\, a^2 (l_0 + b)(l_0 + b)^2 = \frac{1}{12}\rho\, a^2 (l_0 + b)^3$$

Zylinder: $$\Theta_{\text{Zylinder}} = \frac{1}{4} m_{\text{Zylinder}} \left(\frac{d^2}{4} + \frac{b^2}{3} \right) - \frac{1}{12} m_{\text{Loch}} \left(a^2 + b^2 \right)$$

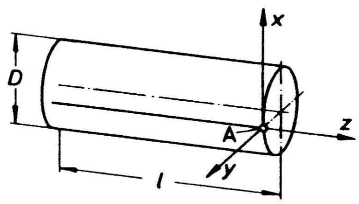
mit den Massen $m_{\text{Zylinder}} = \rho \frac{\pi}{4} d^2 b$ und $m_{\text{Loch}} = \rho\, a^2 b$

Es ist $$\frac{1}{2}\Theta_0 = \Theta_1 = \Theta_{\text{Stange}} + 2\Theta_{\text{Zylinder}} + 2\left(m_{\text{Zylinder}} - m_{\text{Loch}} \right)\left(\frac{l_1}{2} \right)^2$$

Dabei ist l_1 die neue Lage der Zylinder. Diese Formel wird umgestellt und liefert die Position l_1 .

$$l_1 = \sqrt{2 \frac{\left(\frac{1}{2}\Theta_0 - \Theta_{\text{Stange}} - 2\Theta_{\text{Zylinder}} \right)}{\left(m_{\text{Zylinder}} - m_{\text{Loch}} \right)}} = 163 mm$$

<u>Achsentransformation beim Zylinder</u>



Wie groß sind die Massenträgheitsmomente des homogenen Kreiszylinders für das eingezeichnete Koordinatensystem?

Bezogen auf ein Koordinatensystem das im Massenmittelpunkt platziert ist und parallel zum vorhandenen ist, sind die MTM

$$\Theta_{xS} = \frac{m}{16} D^2 + \frac{m}{12} l^2$$
$$\Theta_{yS} = \Theta_{xS}$$
$$\Theta_{zS} = \frac{m}{8} D^2$$

Mit den oben genannten Formeln erhalten wir

$$\Theta_{xA} = \Theta_{xS} + m\left(y_s^{\,2} + z_s^{\,2} \right) = \frac{m}{16} D^2 + \frac{m}{12} l^2 + m\left(\frac{D}{2} \right)^2 + m\left(\frac{l}{2} \right)^2 = \frac{5}{16} m D^2 + \frac{1}{3} m l^2$$

$$\Theta_{yA} = \Theta_{yS} + m\left(x_s^{\,2} + z_s^{\,2} \right) = \frac{m}{16} D^2 + \frac{m}{12} l^2 + m(0)^2 + m\left(\frac{l}{2} \right)^2 = \frac{1}{16} m D^2 + \frac{1}{3} m l^2$$

$$\Theta_{zA} = \Theta_{zS} + m\left(x_s^{\,2} + y_s^{\,2} \right) = \frac{m}{8} D^2 + m(0)^2 + m\left(\frac{D}{2} \right)^2 = \frac{3}{8} m D^2$$

Da die Achsen im Punkt A keine HTA sind entstehen auch Deviationsmomente.

$$\Theta_{xyA} = \Theta_{xyS} - m\,x_s y_s = 0 - 0 \cdot \frac{D}{2} \cdot m = 0$$

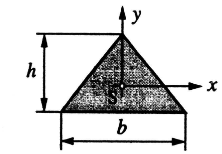
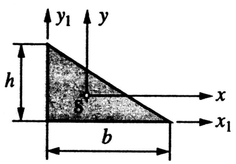
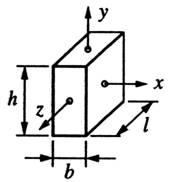
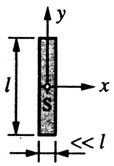
$$\Theta_{yzA} = \Theta_{yzS} - m\,y_s z_s = 0 - \frac{D}{2} \cdot \frac{l}{2} \cdot m = -\frac{1}{4} Dlm$$

$$\Theta_{zxA} = \Theta_{zxS} - m\,z_s x_s = 0 - \frac{l}{2} \cdot 0 \cdot m = 0$$

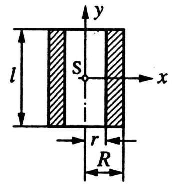
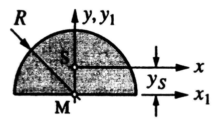
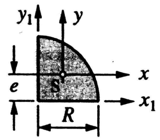
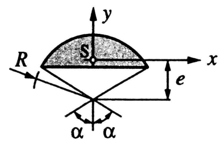
Zusammenstellungen von Massenträgheitsmomenten verschiedener Körper in tabellarischer Form findet man in vielen Lehr- und Übungsbüchern zur Technischen Mechanik und anderen technischen Nachschlagewerken.

Im Anhang finden Sie einige Tabellen mit Massenträgheitsmomenten häufig verwendeter Körper.

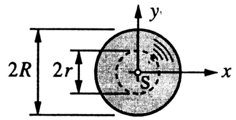
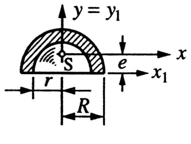
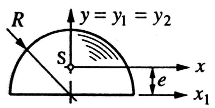
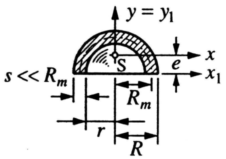
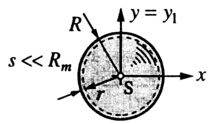
11.1 Massenträgheitsmomente

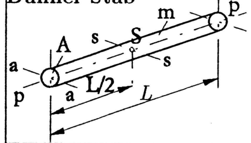
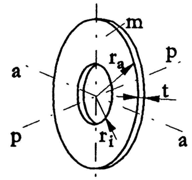
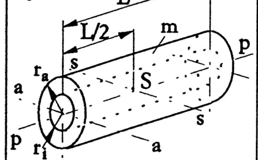
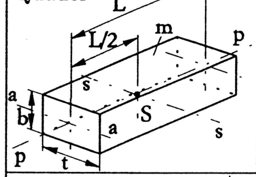
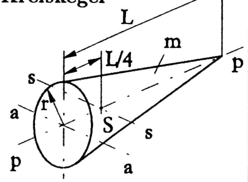
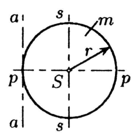
Körper (Masse m)	Massenträgheitsmoment (bezogen auf die jeweiligen Schwerpunktsachsen)
Gleichschenklige Dreieckscheibe mit konstanter Dicke 	$J_x = m \cdot \frac{h^2}{18}$ $\quad J_y = m \cdot \frac{b^2}{24}$ $J_z = \frac{m}{6} \cdot \left(\frac{b^2}{4} + \frac{h^2}{3} \right)$
Rechtwinklige Dreieckscheibe mit konstanter Dicke 	$J_x = m \cdot \frac{h^2}{18}$ $\quad J_{x_1} = m \cdot \frac{h^2}{6}$ $J_y = m \cdot \frac{b^2}{18}$ $\quad J_{y_1} = m \cdot \frac{b^2}{6}$ $J_z = \frac{m}{18} \cdot \left(b^2 + h^2 \right)$ $\quad J_{z_1} = \frac{m}{6} \cdot \left(b^2 + h^2 \right)$
Quader 	$J_x = \frac{m}{12} \cdot \left(h^2 + l^2 \right)$ $\quad J_y = \frac{m}{12} \cdot \left(b^2 + l^2 \right)$ $J_z = \frac{m}{12} \cdot \left(b^2 + h^2 \right)$
Stab (schlank) 	$J_x = J_z = m \cdot \frac{l^2}{12}$

11.2 Massenträgheitsmomente

Körper (Masse m)	Massenträgheitsmoment (bezogen auf die jeweiligen Schwerpunktsachsen)
Hohlzylinder 	$J_x = J_z = \frac{m}{4} \cdot \left(r^2 + R^2 + \frac{l^2}{3} \right)$ $J_y = \frac{m}{2} \cdot \left(r^2 + R^2 \right)$
Dünne Halbkreisscheibe mit konstanter Dicke 	$y_S = \frac{4R}{3\pi}$ $\quad J_x = m R^2 \cdot \left(\frac{1}{4} - \frac{16}{9\pi^2} \right)$ $J_{x_1} = J_{y_1} = \frac{m R^2}{4}$ $\quad J_y = \frac{m R^2}{4}$ $J_{z_1} = \frac{m R^2}{2} = J_M$ $\quad J_z = m R^2 \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{16}{9\pi^2} \right)$
Dünne Viertelkreisscheibe mit konstanter Dicke 	$e = \frac{4R}{3\pi}$ $J_x = J_y = m R^2 \cdot \left(\frac{1}{4} - \frac{16}{9\pi^2} \right)$ $\quad J_{x_1} = J_{y_1} = \frac{m R^2}{4}$ $J_z = m R^2 \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{32}{9\pi^2} \right)$ $\quad J_{z_1} = \frac{m R^2}{2}$
Dünner Kreisscheibenabschnitt mit konstanter Dicke 	$e = \frac{4R \cdot \sin^3 \alpha}{3 \cdot [2\alpha - \sin(2\alpha)]}$ $J_x = m R^2 \cdot \frac{\frac{\alpha}{4} - \frac{\sin(4\alpha)}{16} - \frac{8 \sin^6 \alpha}{9 \cdot [2\alpha - \sin(2\alpha)]}}{\alpha - \frac{1}{2} \cdot \sin(2\alpha)}$ $J_y = m R^2 \cdot \frac{2\alpha - \frac{4}{3} \cdot \sin(2\alpha) + \frac{1}{6} \cdot \sin(4\alpha)}{8\alpha - 4 \cdot \sin(2\alpha)}$

11.3 Massenträgheitsmomente

Körper (Masse m)	Massenträgheitsmoment (bezogen auf die jeweiligen Schwerpunktsachsen)
Hohlkugel 	$J_x = J_y = J_z = \frac{2m}{5} \cdot \frac{R^5 - r^5}{R^3 - r^3}$
Hohlhalbkugel 	$e = \frac{3}{8} \cdot \frac{R^4 - r^4}{R^3 - r^3}$ $J_x = J_z = \frac{2m}{5} \cdot \frac{R^5 - r^5}{R^3 - r^3} - \frac{9m}{64} \cdot \frac{(R^4 - r^4)^2}{(R^3 - r^3)^2}$ $J_y = \frac{2m}{5} \cdot \frac{R^5 - r^5}{R^3 - r^3}$ $J_{x_1} = J_{y_1} = J_{z_1} = \frac{2m}{5} \cdot \frac{R^5 - r^5}{R^3 - r^3}$
Halbkugel 	$e = \frac{3R}{8}$ $J_x = J_z = \frac{83}{320} \cdot m R^2$ $J_{x_1} = J_{y_1} = J_{z_1} = J_y = J_{y_2} = \frac{2}{5} \cdot m R^2$ $J_{x_2} = J_{z_2} = \frac{13}{20} \cdot m R^2$
Kugelhalbschale 	$R \approx r \approx R_m$ $e \cong \frac{R_m}{2}$ $J_{x_1} = J_{y_1} = J_{z_1} = \frac{2m \cdot R_m^2}{3}$ $J_x = J_z = \frac{5m \cdot R_m^2}{12}$ $J_y = \frac{2m \cdot R_m^2}{3}$
Kugelschale 	$R \approx r \approx R_m$ $J_x = J_y = J_z \cong \frac{2m \cdot R_m^2}{3}$

Dünner Stab 	$m = \rho A L$ A = Stabquerschnitt ρ = Dichte	$J_s = \frac{mL^2}{12}$; $J_a = \frac{mL^2}{3}$; $J_p = 0$
Dünne Scheibe 	$m = \rho t \pi (r_a^2 - r_i^2)$	$J_a = \frac{m}{4}(r_a^2 + r_i^2)$; $J_p = \frac{m}{2}(r_a^2 + r_i^2)$
	Dünne Vollscheibe ($r_i = 0$)	
	$m = \rho t \pi r_a^2$	$J_a = \frac{m}{4} r_a^2$; $J_p = \frac{m}{2} r_a^2$
	Dünner Ring ($r_a \approx r_i \approx R$)	
	$m = \rho A 2 R \pi$ A = Ringquerschnitt	$J_a = \frac{m}{2} R^2$; $J_p = m R^2$
Zylinder 	$m = \rho L \pi (r_a^2 - r_i^2)$	$J_s = \frac{m}{12}\left[3(r_a^2 + r_i^2) + L^2\right]$; $J_a = \frac{m}{3}\left[\frac{3}{4}(r_a^2 + r_i^2) + L^2\right]$; $J_p = \frac{m}{2}(r_a^2 + r_i^2)$;
Quader 	$m = \rho b t L$	$J_s = \frac{m}{12}(b^2 + L^2)$; $J_a = \frac{m}{12}(b^2 + 4L^2)$; $J_p = \frac{m}{12}(b^2 + t^2)$;
Kreiskegel 	$m = \frac{1}{3} \rho \pi r^2 L$	$J_s = \frac{3m}{80}(4r^2 + L^2)$; $J_a = \frac{3m}{80}(4r^2 + \frac{8}{3} L^2)$; $J_p = \frac{3}{10} m r^2$;
Kugel 	$m = \frac{4}{3} \rho \pi r^3$	$J_s = J_p = \frac{2}{5} m r^2$; $J_a = \frac{7}{5} m r^2$;